Kérjük, hogy a dolgozatokat – az egységes értékelés érdekében – szigorúan az alábbi útmutató szerint pontozzák, a megadott részpontszámokat ne bontsák tovább! Vagyis, ha egy részmegoldásra pl. 3 pontot javaslunk, akkor arra vagy 0, vagy 3 pont adható.

Beküldési ponthatár: **160 pont**

Beküldési határidő: **2025. november 24.** (minden versenyző eredménye, a beküldhetők munkája)

<u>1. feladat</u> (50 pont)

Egy labirintus alaprajzát olyan fekete-fehér négyzetráccsal ábrázoljuk, ahol a fekete mezők falakat jelölnek, míg a fehér mezőkön szabadon lehet mozogni. Egy lépésben egy fehér mezőről indulva vízszintesen vagy függőlegesen haladva tetszőleges számú fehér mezőt léphetünk át úgy, hogy végül fehér mezőre vagy a labirintuson kívülre kell érkeznünk. Lépés közben fekete mezőt nem szabad átlépni.

A. Add meg, hogy az alábbi **1. labirintus** esetén az A-val és B-vel jelölt mezőkről indulva legkevesebb hány lépéssel lehet kijutni a labirintusból. Azt is add meg, hogy hány különböző lépéssorozattal lehet a minimális számú lépéssel kijutni ezekről a helyekről.

Minimum lépésszám A-ból: **4** **5 pont**	Minimum lépésszám B-ből: **3** **5 pont**
Lépéssorozatok száma A-ból: **2** **5 pont**	Lépéssorozatok száma B-ből: **4** **5 pont**

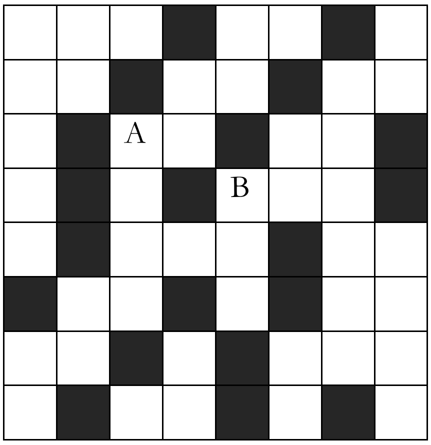
B. Jelöld meg (az 1, 2, … számokkal) a **2. labirintus**ban azokat a mezőket, ahonnan a legtöbb lépés szükséges a kijutáshoz. Minden megjelölt mezőre add meg, hányféle különböző lépéssorozattal lehet kijutni ezekről a mezőkről a minimális számú lépésben.

Mezők megjelölése a lenti 2. ábrán (max. 12 pont): minden helyes mező egyenként +4 pont; minden egyéb megjelölt mező egyenként -4 pont. Ha több rosszat jelölt, mint jót, akkor 0 pont jár. A három jó mező tetszőleges sorrendű számozással megjelölhető (1-2-3, 1-3-2, 2-1-3, stb.).

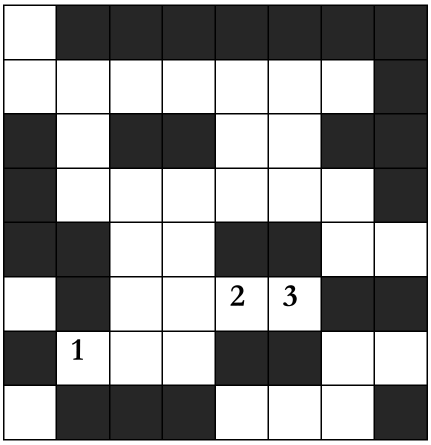
Lépéssorozatok száma (max. 18 pont): a szövegdobozban ügyeljünk rá, hogy minden megadott számszerű válasz a megfelelő mezőhöz tartozik-e. Minden helyesen megjelölt mezőhöz tartozó helyes érték 6 pontot ér. Ha rosszul megjelölt mezőhöz ad meg értéket, arra az értékre 0 pont jár.

1: 8 2: 8 3: 8 **18 pont (minden helyes érték 6 pont)**

1. labirintus



2. labirintus



<u>2. feladat</u> (40 pont)

Külföldi nyaralásra a helyi pénznemből a felsorolt értékű bankjegyeket vittük magunkkal. Határozd meg azt a legkisebb pénzösszeget, amit nem lehetséges **pontosan** kifizetni a pénzünkből.

Bankjegyek	Legkisebb nem kifizethető összeg
`1,2,4,8,16,32,64`	**128** **10 pont**
`1,1,2,5,10,15,25,35,100`	**95** **10 pont**
`7,34,83,1,17,2,1,170,5`	**68** **10 pont**
`2,100,5,10,2,20,30,80,1,1,90`	**72** **10 pont**

<u>3. feladat</u> (70 pont)

Az `N` elemű, egész számokat tartalmazó `T=[T[1],T[2],…,T[N]]` tömböt *kupac* tulajdonságúnak nevezzük, ha minden `i` indexre teljesülnek az alábbiak:

- Ha `2*i≤N`, akkor `T[i]≤T[2*i]`.
- Ha `2*i+1≤N`, akkor `T[i]≤T[2*i+1]`.

Válaszold meg az alábbi kérdéseket.

A. Tegyük fel, hogy `T` tömbnek 10 eleme van, kupac tulajdonságú és elemei páronként **különbözőek**. Sorold fel, melyik indexeken fordulhatnak elő a következő elemek:

`T` legkisebb eleme:	**1** **6 pont**
`T` legnagyobb eleme:	**6, 7, 8, 9, 10** **12 pont, ha mindet felsorolta** **5 pont, ha a válasza '8, 9, 10'** **0 pont, egyébként**
`T` harmadik legkisebb eleme:	**2, 3, 4, 5, 6, 7** **12 pont, ha mindet felsorolta** **5 pont, ha legalább 3-at felsorolt** **0 pont, egyébként**

B. Tekintsük a következő eljárásokat, ahol `T` kupac tulajdonságú, `N` elemű tömb és `X` egy tetszőleges egész szám.

```
Be1(N, T[], X):
 T[N+1]:=X;
 N:=N+1;
 Ciklus i=N-től 1-ig
  Ha 2*i+1≤N és T[i]>T[2*i+1]:
   Csere(T[i],T[2*i+1]);
  Ha 2*i≤N és T[i]>T[2*i]:
   Csere(T[i],T[2*i]);
 Ciklus vége
Eljárás vége
```

```
Be2(N, T[], X):
 T[N+1]:=X;
 N:=N+1;
 Ciklus i=N-1-től 1-ig
  Ha T[i]>T[i+1]:
   Csere(T[i],T[i+1]);
 Ciklus vége
Eljárás vége
```

a. Mi lesz a `Be1(8,[1,5,6,7,7,8,8,9],4)` hívás után a `T` tömb tartalma?

T = **[1, 4, 6, 5, 7, 8, 8, 9, 7]** **10 pont**

b. Mi lesz a `Be2(8,[1,5,6,7,7,8,8,9],4)` hívás után a `T` tömb tartalma?

T = **[1, 4, 5, 6, 7, 7, 8, 8, 9]** **10 pont**

c. A két hívás végén kapott tömbök közül melyik lesz kupac tulajdonságú?

`Be1` után `Be2` után [✓ Mindkettő után] Egyik után sem

8 pont, ha az a. és b. is helyesek voltak

0 pont, ha az a. vagy b. helytelen volt

d. Melyik eljárással kapunk biztosan kupac tulajdonságú tömböt tetszőleges megengedett bemenetre?

[✓ `Be1` után] `Be2` után Mindkettő után Egyik után sem

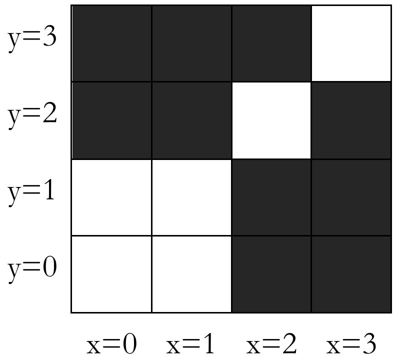
12 pont

<u>4. feladat</u> (100 pont)

A „négyágú fa" kódolást 2^Nx2^N méretű fekete-fehér képek tömörítésére használják. A módszer a képeket bitsorozatokká (`0` és `1` számjegyek sorozatává) alakítja át, melyeket balról jobbra olvasva a következő szabályok szerint dekódolunk:

- A legelső bit a teljes 2^Nx2^N részt írja le.
- Ha a sorozatban `0` bit következik, az felosztást jelent: az aktuális 2^kx2^k méretű részt négy darab 2^{k-1}x2^{k-1} méretű kisebb részre bontjuk és a sorozat ezek leírásával folytatódik, rendre a bal felső, jobb felső, bal alsó, majd jobb alsó rész leírásával.
- Ha a sorozatban az `10` bitek következnek, akkor az általuk leírt rész csak fekete képpontokat tartalmaz.
- Ha a sorozatban az `11` bitek következnek, akkor az általuk leírt rész csak fehér képpontokat tartalmaz.

Vegyük például a következő `4x4` méretű képet:



A képet ekkor le lehet írni a következő bitsorozattal (a felosztást jelző `0` biteket megvastagítottuk; a dőltel jelölt `11` részsorozat a teljes `(x,y)=(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)` rész fehér színét írja le):

0010101010**0**10111110*11* **0**10101010

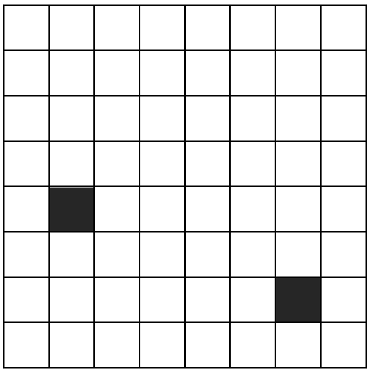
Ez a leírás ugyanakkor nem egyértelmű.

A. Add meg a legrövidebb olyan bitsorozatot, ami a fenti képet írja le.

0100101111101110	**12 pont**

B. Színezd ki a képpontokat az alábbi bitsorozatnak megfelelően.

`011110011101111111111011111010111111`



24 pont összesen: a bal felső 4x4 blokk 5 pontot, a jobb felső 4x4 blokk 5 pontot, a bal alsó 4x4 blokk 7 pontot, a jobb alsó 4x4 blokk 7 pontot ér.

C. Mennyi lesz a legrövidebb kódoló bitsorozat hossza az alábbi méretű képekre, ha pontosan egy képpont fekete és a többi fehér?

4x4	**16**	**6 pont**
16x16	**30**	**8 pont**
2^8x2^8	**58**	**10 pont**

D. Mennyi lesz a legrövidebb kódoló bitsorozat hossza az alábbi méretű képekre, ha pontosan azok a képpontok feketék, amikre `x=0` vagy `y=0` (vagy mindkettő) teljesül?

`4x4`	**30**	**8 pont**
`16x16`	**184**	**12 pont**
2^8x2^8	**3516**	**20 pont**

5. feladat (40 pont)

Egy építkezésen több munkát is el kell végezni, melyek közül bizonyos munkákat csak akkor lehet elkezdeni, ha más munkákkal már korábban végeztek. A munkákat sorszámokkal azonosítjuk, és az előfeltételeket számpárokkal adjuk meg: az `(x,y)` pár jelentése, hogy az `y` munka elkezdése előtt el kell végezni az `x` munkát. A munkákat egyesével végzik el a munkások.

A munkavégzés sorrendjének meghatározásához a megadott előfeltételek mellett még két további szabályt alkalmaznak:

- Van egy kritikus fontosságú `X` munka, amit a lehető legkorábban el kell végezni (az előfeltételek betartása mellett).
- Minden esetben, amikor az előfeltételek és a kritikus munkára vonatkozó szabály megengedik több munka elvégzése között a választást, a lehető legkisebb sorszámút kell elvégezni.

Add meg a munkavégzés sorrendjét a következő esetekben.

Előfeltételek	Kritikus munka	Munkavégzés sorrendje	
`(5,2),(1,3),(1,4),(2,3)`	4	**1, 4, 5, 2, 3**	**10 pont**
	2	**5, 2, 1, 3, 4**	**10 pont**
`(2,3),(4,6),(1,2),(6,7),(5,7)`	7	**4, 5, 6, 7, 1, 2, 3**	**10 pont**
	6	**4, 6, 1, 2, 3, 5, 7**	**10 pont**

6. feladat (100 pont)

Sütiországban a király sütiösszeírást kezdeményezett. A sütiszámlálók felkeresték mind az `N=1 000 000` háztartást és feljegyezték, hogy az adott címen hány süti található (legalább `0` és legfeljebb `9999` süti). A háztartásokat `1`-től `N`-ig sorszámozzuk és az i-edik háztartásban található sütik számát S_i jelöli.

Az egyes háztartásokban számolt sütik számát az alábbi sorozat adja meg (a `mod 10000` művelet a `10000`-rel vett osztási maradékot jelenti):

- `i=1,2,…,55` esetén S_i `= (1003*i-2003*i*i+3007*i*i*i) mod 10000`
- Minden `i>55`-re S_i `=` $(S_{i-24}+S_{i-55})$ `mod 10000`

Válaszolj az alábbi kérdésekre:

A. Add meg az alábbi háztartásokban található sütik számát.

`i`	`2`	`70`	`999 999`
S_i	**8050 10 pont**	**137 10 pont**	**9574 10 pont**

B. Hány süti van összesen Sütiországban?

5005330257 **15 pont**

C. Hány olyan háztartás van, ahol 0 süti található?

121 **15 pont**

D. A király szeretne kiválasztani pontosan két olyan (különböző) háztartást, ahol összesen `6666` süti található. Hányféleképpen lehet ezt megtenni?

33290216 **20 pont**

E. A király most szeretne pontosan három különböző háztartást kiválasztani, ahol összesen `9999` süti található. Hányféleképpen lehet ezt megtenni?

8305006351080 **20 pont**